SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

N. GAROFALO

SVILUPPI RECENTI IN ANALISI ARMONICA
(I Parte)

14 MAGGIO 1987

1. IL PROBLEMA DELLA RESTRIZIONE DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

Il tema di questa nota è la trasformata di Fourier in R^n. Più precisamente, alcune idee su di essa incentrate che si sono andate sviluppando all'incirca negli ultimi quindici anni. Le direzioni prese da tali sviluppi sono molteplici e, apparentemente, distinte. Uno studio attento rivela, tuttavia, connessioni profonde e una grande unità. La mia attenzione si fermerà su un particolare problema concernente la trasformata di Fourier: quello della sua restrizione a una varietà (n-1)-dimensionale. L'intento è quello di illustrare la genesi del problema, i suoi legami con altri problemi di analisi armonica, dare un resoconto di ciò che fino ad oggi è stato fatto e indicare qualche problema aperto. In un secondo tempo discuterò alcune notevoli applicazioni a problemi riguardanti equazioni alle derivate parziali.

La definizione di trasformata di Fourier che adotterò nel seguito è

$$(1.1) \qquad \hat{f}(x) = \int_{R^n} e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} f(\xi)\, d\xi \quad , \quad f\in L^1(R^n).$$

Con tale definizione il Teorema di Plancherel si scrive

$$(1.2) \qquad \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2 \quad , \quad f\in L^2(R^n).$$

Un'immediata conseguenza di (1.1) è che se τ è una rotazione di R^n su se stesso, allora

$$(1.3) \qquad (f\circ\tau)\hat{} = \hat{f}\circ\tau.$$

Se ora $f\circ\tau=f$ per ogni rotazione τ, cioè f è radiale, allora per (1.3) $\hat{f} = \hat{f}\circ\tau$ per ogni τ, e quindi anche $\hat{f}$ è radiale.

Il mio punto di partenza è una bellissima formula che è conseguenza della proprietà di simmetria sopra evidenziata. Se $x,\xi\in R^n$ scriviamo $x = r\omega$,

$\xi = s\omega'$, dove $r = |x|$, $s = |\xi|$, $\omega = \frac{x}{|x|}$, $\omega' = \frac{\xi}{|\xi|}$. Sia f una funzione radiale. Allora $f(\xi) = f(s)$ e si ha

$$(1.4) \qquad \hat{f}(x) = \int_{R^n} e^{-2\pi i \langle x,\xi\rangle} f(\xi)d\xi = \int_0^{+\infty} \left(\int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i rs\langle\omega,\omega'\rangle} d\omega' \right) f(s)s^{n-1}ds.$$

Per calcolare l'integrale su S^{n-1} poniamo per $0 \leqq \theta < \pi$ $L_\theta = \{\omega' \in S^{n-1} | \langle\omega,\omega'\rangle = \cos\theta\}$. Se $d\sigma$ è la misura indotta da $d\omega'$ su L_θ si ha

$$(1.5) \qquad \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i rs\langle\omega,\omega'\rangle} d\omega' = \int_0^\pi \left(\int_{L_\theta} e^{-2\pi i rs\langle\omega,\omega'\rangle} d\sigma \right) d\theta$$

$$= \int_0^\pi e^{-2\pi i rs\cos\theta} |L_\theta| d\theta = \int_0^\pi e^{-2\pi i rs\cos\theta} (\sigma_{n-2} \sin^{n-2}\theta) d\theta,$$

dove per ogni $n \in N$ $\sigma_{n-1} = |S^{n-1}|$. La (1.5) dà

$$(1.6) \qquad \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i rs\langle\omega,\omega'\rangle} d\omega' = \sigma_{n-2} \int_{-1}^{1} e^{2\pi i\, rsu} (1-u^2)^{\frac{n-3}{2}} du$$

Ora ricordiamo la seguente rappresentazione integrale della funzione di Bessel J_k, quando $\mathrm{Re}K > -\frac{1}{2}$ (cfr. [L], p. 114)

$$(1.7) \qquad J_k(t) = \frac{(t/2)^k}{\Gamma(\frac{2k+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^{1} e^{itu} (1-u^2)^{\frac{2k-1}{2}} du$$

Confrontando (1.6) e (1.7) otteniamo

$$(1.8)\qquad \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i\, rs\langle\omega,\omega'\rangle} d\omega' = \sigma_{n-2}(\pi rs)^{-\frac{n-2}{2}}\, \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi rs)$$

Tenuto conto che

$$\sigma_{n-2} = \frac{2\,\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\quad,\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}$$

si trae da (1.8)

$$(1.9)\qquad \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i\, rs\langle\omega,\omega'\rangle} d\omega' = 2\pi\, r^{-\frac{n-2}{2}}\, s^{-\frac{n-2}{2}}\, J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi rs)$$

Se sostituiamo (1.9) nella (1.4) otteniamo infine la seguente formula di Fourier-Bessel.

<u>Proposizione 1.1.</u> *Sia* $f\in L^1(R^n)$ *e* f *radiale. Allora*

$$(1.10)\qquad \hat{f}(x) = \hat{f}(r) = (2\pi) r^{-\frac{n-2}{2}} \int_0^{+\infty} f(s)\, J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi rs)\, s^{\frac{n}{2}}\, ds.$$

La Propositione 1.1 è un caso particolare di un risultato generale di Bochner ed Hecke (cfr. [S] e [SW]). Ora il Teorema di Hausdorff-Young dice che se $f\in L^p(R^n)$, con $1\leq p\leq 2$, allora $\hat{f}\in L^{p'}(R^n)$ e risulta

$$\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p ,$$

dove $p' = \frac{p}{p-1}$, $p' = +\infty$ se $p=1$. Cosicché $\hat{f}$ è definita solo quasi ovunque e la restrizione di $\hat{f}$ a un insieme di misura nulla in R^n non ha senso. Se ora supponiamo che f sia radiale, allora $\hat{f}$ è una funzione radiale che è definita so-

lo per quasi ogni $r>0$. Tuttavia vale la seguente notevole

Proposizione 1.2. (L. Schwartz, non pubblicata). Se $1\le p<\frac{2n}{n+1}$, $f\in L^p(R^n)$ e f è radiale, allora $\hat{f}$ è continua su R^+. Se $\frac{2n}{n+1}\le p\le 2$ allora esistono funzioni in $L^p(R^n)$ per cui $\hat{f}(1) = +\infty$.

Prova. In base alla (1.10) abbiamo

$$\hat{f}(r) = 2\pi\, r^{-\frac{n-2}{2}} \int_0^{+\infty} f(s)\, J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi rs)\, s^{\frac{n}{2}} ds. \tag{1.12}$$

Ora per ipotesi

$$\|f\|_p = \sigma_{n-1}^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} |r^{\frac{n-1}{p}} f(r)|^p dr\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

e quindi dalla disuguaglianza di Hölder

$$\left|\int_0^{+\infty} f(s)\, J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi rs) s^{\frac{n}{2}}\, ds\right| \le \left(\int_0^{+\infty} |f(s)|^p\, s^{n-1} ds\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \tag{1.13}$$

$$\cdot\left(\int_0^{\infty} |J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi rs)|^{p'}\, s^{(\frac{n}{2}-\frac{n-1}{p})p'} ds\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= \sigma_{n-1}^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \left(\int_0^{\infty} |J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi rs)|^{p'}\, s^{(\frac{n}{2}-\frac{n}{p}+\frac{1}{p})p'} ds\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= \sigma_{n-1}^{-\frac{1}{p}} (2\pi r)^{-[n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})+1]} \|f\|_p \left(\int_0^{+\infty} |J_{\frac{n-2}{2}}(t)|^{p'}\, t^{(\frac{n}{2}-\frac{n}{p}+\frac{1}{p})p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Ora ricordiamo che (cfr. [L], p. 134)

$$(1.14) \qquad |J_{\frac{n-2}{2}}(t)| \cong \begin{cases} t^{\frac{n-2}{2}}, & t\to 0^+ \\ t^{-\frac{1}{2}}, & t\to +\infty \end{cases}$$

La (1.14) implica che

$$(1.15) \qquad |J_{\frac{n-2}{2}}(t)|^{p'} t^{(\frac{n}{2} - \frac{n}{p} + \frac{1}{p})p'} \in L^1(0,\delta),$$

per δ sufficientemente piccolo, come sola conseguenza del fatto che $p>1$.

Sempre per (1.14) abbiamo

$$(1.16) \qquad |J_{\frac{n-2}{2}}(t)|^{p'} t^{(\frac{n}{2} - \frac{n}{p} + \frac{1}{p})p'} = O(t^{(\frac{n}{2} - \frac{1}{2} - \frac{n}{p} + \frac{1}{p})p'}) \text{ se } t\to\infty$$

e quindi tale funzione è integrabile a $+\infty$ se

$$\frac{n}{2} - \frac{1}{2} - \frac{n}{p} + \frac{1}{p} < \frac{1}{p} - 1,$$

ovvero

$$p < \frac{2n}{n+1} .$$

Sotto tale ipotesi, perciò, l'integrando in (1.12) è sommabile e un facile argomento dimostra che l'integrale definisce una funzione continua di r su R^+. Per la seconda affermazione della Proposizione 1.2 si veda [V].

La Proposizione 1.2 è un'osservazione dovuta a L. Schwartz che può farsi risalire al 1945 circa. Il suo interesse consiste nel fatto che se

$1 \le p < \frac{2n}{n+1}$ la trasformata di Fourier di una funzione radiale di $L^p(R^n)$ è una funzione definita per ogni $r>0$. Ha perciò senso considerare ad esempio $\hat{f}(1)$. Questo non è altro che $\hat{f}|S^{n-1}$, la restrizione di $\hat{f}$ alla sfera unitaria in R^n.

Osserviamo esplicitamente che la dimostrazione della Proposizione 1.2 dà per una certa costante $C_{n,p}$ dipendente da n e p

$$(1.17) \qquad |\hat{f}(1)| \le C_{n,p}\|f\|_p \quad , \quad \text{se } 1 \le p < \frac{2n}{n+1}.$$

Queste considerazioni portano a porsi il seguente

Problema 1. *Esistono degli indici* $p \ge 1$ *tali che, se* $f \in L^p(R^n)$, *abbia senso considerare la restrizione di* $\hat{f}$ *a una varietà* $(n-1)$*-dimensionale di* R^n, *in particolare* S^{n-1}?

Prima di esaminare questo problema vorrei soffermarmi brevemente sulla (1.11), la disuguaglianza di Hausdorff-Young. La costante 1 che in essa appare è conseguenza dell'ovvia stima $\|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$, del Teorema di Plancherel (1.2), e della convessità logaritmica delle norme nel Teorema di interpolazione di Riesz-Thorin. Ora se consideriamo la funzione $e^{-\pi|\cdot|^2}$ questa gode della notevole proprietà che

$$(1.18) \qquad (e^{-\pi|\cdot|^2})^{\hat{}} = e^{-\pi|\cdot|^2}.$$

D'altra parte $e^{-\pi|\cdot|^2} \in L^p(R^n)$ per ogni $p>0$ e risulta

$$(1.19) \qquad \|e^{-\pi|\cdot|^2}\|_p = p^{-\frac{n}{2p}}$$

(1.18) e (1.19) portano a concludere che

$$(1.20) \qquad \|(e^{-\pi|\cdot|^2})^{\hat{}}\|_{p'} = \left(\frac{p^{1/p}}{p'^{1/p'}}\right)^{n/2} \|e^{-\pi|\cdot|^2}\|_p$$

per ogni $p\geq 1$. E' chiaro che se $p=1$ o $p=2$, allora $(p^{\frac{1}{p}}/p'^{\frac{1}{p'}})^{\frac{n}{2}} = 1$. Ma se $1<p<2$, allora $2<p'<+\infty$ e quindi $(p^{1/p}/p'^{1/p'})^{n/2} < 1$.

Ciò conduce a un altro problema riguardante la trasformata di Fourier in R^n.

Problema 2. *Qual'è la costante ottimale nella disuguaglianza di Hausdorff-Young?*

La risposta a questo problema è stata data da W. Beckner in [B]. In esso si dimostra che la norma della trasformata di Fourier viene assunta sulla funzione $e^{-\pi|\cdot|^2}$, o qualunque dilatazione di essa, e quindi la costante ottimale in (1.11) è proprio il numero $(p^{\frac{1}{p}}/p'^{\frac{1}{p'}})^{\frac{n}{2}}$ che compare in (1.20).

Ma torniamo al Problema 1. La formulazione sopra data presenta subito almeno un lato debole. E' chiaro che qualunque varietà (n-1)-dimensionale non può andar bene. Le varietà lineari sono escluse. In R^2 sia infatti $f(x,y) = f(x)$, χ la funzione caratteristica della striscia $R\times(0,1)$, e supponiamo che $f \in L^p(R)$, $p>1$, ma $f \notin L^1(R)$. Poniamo $g(x,y) = f(x)\chi(x,y)$. Allora $g \in L^p(R^2)$ e risulta $\|g\|_{L^p(R^2)} = \|f\|_{L^p(R)}$, mentre

$$\hat{g}(x,0) = \int_R e^{-2\pi i x\xi} f(\xi)d\xi = \hat{f}(x).$$

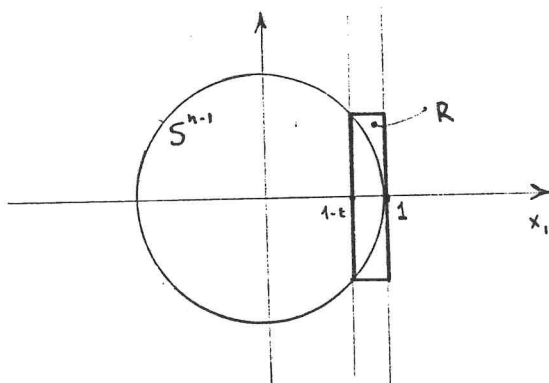
La formula (1.9) trovata in precedenza dischiude il ruolo giocato dalla curvatura in un problema come quello della restrizione. Riformuliamo il Problema 1 analiticamente relativamente alla sfera S^{n-1}:

Problema 1'. *Esistono coppie* (p,q) *tali che se* $f \in L^p(R^n)$ *si abbia una stima a priori del tipo*

$$\|\hat{f}\|_{L^q(S^{n-1})} \leq A\|f\|_{L^p(R^n)}, \quad f \in C_0^\infty(R^n), \tag{1.21}$$

essendo A *indipendente da* f?

La risposta a tale problema dipende in maniera determinante dal fatto che S^{n-1} ha curvatura. Questo è un principio generale in analisi armonica su cui torneremo più avanti.

Intanto osserviamo che p in (1.21) deve essere compreso fra 1 e 2. Infatti, se p>2 la trasformata di Fourier di una $f \in L^p(R^n)$ (nel senso delle distribuzioni) può non essere una funzione. Il ruolo della curvatura nel Problema 1' è evidenziato dal seguente argomento, dovuto a A. Knapp, che individua tutte le coppie (p,q), con $1 \leq p \leq 2$ per cui può sussistere (1.21), cfr. $[S]_2$. Consideriamo in R^n: due punti sull'asse x_1 di coordinate $P_1=(1,0,...,0)$ e $P_2(1-\varepsilon,0,...,0)$. Mandiamo due piani perpendicolari a x_1 e passanti per P_1 e P_2 rispettivamente. Dopodicché costruiamo un rettangoloide R come nella figura bidimensionale qui sotto

Sia ora χ_R la funzione caratteristica di R e poniamo $\chi_R = \hat{f}$. Sostituendo f nella (1.21) otteniamo

$$(1.22) \qquad \|\hat{f}\|_{L^q(S^{n-1})} = |R \cap S^{n-1}|^{\frac{1}{q}} \cong \varepsilon^{\frac{n-1}{2q}}$$

quando $s \to 0^+$. D'altra parte

$$f(x) = \int_{R^n} e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} \chi_R(\xi)d\xi =$$

$$= e^{2\pi i x_1(1-\frac{\varepsilon}{2})} \frac{\sin(\pi\varepsilon x_1)}{\pi x_1} \prod_{j=2}^{n} \frac{\sin(2\pi\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}\, x_j)}{\pi x_j}$$

Quindi se $p>1$ (il caso $p=1$ è banale)

$$(1.23) \qquad \|f\|_{L^p(R^n)} = \left(\int_R \left(\left|\frac{\sin(\pi\varepsilon x_1)}{\pi x_1}\right|^p dx_1\right)\right)^{\frac{1}{p}} \prod_{j=2}^{n} \left(\int_R \left|\frac{\sin(2\pi\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}\, x_j)}{\pi x_j}\right|^p dx_j\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\cong \varepsilon^{\frac{n+1}{2p'}} \quad , \text{ quando } \varepsilon \to 0^+$$

Dal confronto fra (1.22) e (1.23) si trae che (1.21) può sussistere con A indipendente da f solo se

$$\frac{n-1}{2q} \geq \frac{n+1}{2p'}$$

e quindi solo se

$$(1.24) \qquad q \leq p' \frac{n-1}{n+1}$$

Tuttavia non tutti i $p\in[1,2]$ vanno bene. Infatti se $T:L^p(R^n)\to L^q(S^{n-1})$ è l'operatore di restrizione $Tf = \hat{f}|_{S^{n-1}}$, allora il suo aggiunto $T^*g = \widehat{gd\omega}$, qui $d\omega$ = misura su S^{n-1}, manda $L^{q'}(S^{n-1})$ in $L^{p'}(R^n)$ e si ha

(1.25) $$\|\widehat{g d\omega}\|_{L^{p'}(R^n)} \leq A \|g\|_{L^{q'}(S^{n-1})}$$

Se prendiamo $g \equiv 1$ (1.25) dà

(1.26) $$\|\widehat{d\omega}\|_{L^{p'}(R^n)} \leq c.$$

Ora

(1.27) $$\widehat{d\omega}(x) = d\omega(e^{-2\pi i\langle x,\cdot\rangle}) = \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i\langle x,\omega\rangle}\, d\omega$$

Se poniamo $x = r\omega'$, con $r = |x|$ e $\omega' = \frac{x}{|x|}$, la (1.9) dà

(1.28) $$\widehat{d\omega}(x) = (2\pi)\, |x|^{-\frac{n-2}{2}}\, J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi|x|).$$

Usando (1.14) è immediato riconoscere che

(1.29) $$\widehat{d\omega}\ L^{p'}(R^n) \Leftrightarrow p < \frac{2n}{n+1} .$$

Ecco riapparire l'esponente misterioso della Proposizione 1.2. In conclusione abbiamo dimostrato la seguente

<u>Proposizione 1.3.</u> *Sia* $1 \leq p < \frac{2n}{n+1}$. *Allora se vale*

(1.30) $$\|\hat{f}\|_{L^q(S^{n-1})} \leq A \|f\|_{L^p(R^n)} \quad , \quad f \in C_0^\infty(R^n),$$

dev'essere

(1.31) $$q \leq \frac{n-1}{n+1}\, p' .$$

Se invece $\frac{2n}{n+1} \leq p \leq 2$, *allora il Problema* 1' *della restrizione non ha soluzione, nel senso che la* (1.30) *non sussiste per alcun* q.

Un problema forse più semplice del Problema 1' è quello in cui si prende q = 2 nella (1.30). Allora la (1.31) dà come esponenti critico

$$(1.32) \qquad p = \frac{2(n+1)}{n+3}$$

Si osservi che per $n \geq 2$

$$1 < \frac{2(n+1)}{n+3} < \frac{2n}{n+1} < 2 .$$

Il problema della restrizione della trasformata di Fourier a S^{n-1} era stato aperto per lungo tempo. L'unico risultato parziale esistente era dovuto a Stein (non pubblicato).

<u>Teorema 1.1.</u> *Sia* $1 \leq p < \frac{4n}{3n+1}$. *Allora esiste una costante* C>0, *dipendente solo da* n, *tale che*

$$(1.33) \qquad \|\hat{f}\|_{L^2(S^{n-1})} \leq C \|f\|_{L^p(R^n)} , \quad f \in L^p(R^n).$$

Si noti che quando $n \to +\infty$ $\frac{4n}{3n+1} \to \frac{4}{3}$, mentre $\frac{2(n+1)}{n+3} \to 2$. Qui l'esponente $\frac{4n}{3n+1}$ è lungi dall'essere quello ottimale dato da (1.32).

Lo studio del Problema 1' sarebbe forse andato più a rilento se nel 1970 C. Fefferman in $[F]_1$ non avesse dimostrato che la soluzione del problema della restrizione può essere usata per attaccare un problema di moltiplicatori della trasformata di Fourier connesso con la sommabilità delle serie multiple di Fourier. Per illustrare tale connessione apriamo una parentesi. Sia $T^n = S^1 x \ldots x S^1$ il toro n-dimensionale e consideriamo una funzione

$f \in L^p(T^n)$. La serie multipla di Fourier di f è (cfr. [SW])

(1.34) $$\hat{f}(\theta_1,\dots,\theta_n) = \sum_{k_1\dots k_n=-\infty}^{+\infty} a_{k_1\dots k_n} e^{i(k_1\theta_1+\dots+k_n\theta_n)}$$

essendo $a_{k_1\dots k_n}$ i coefficienti di Fourier di f.

Per R>0 si definisce

(1.35) $$\hat{f}_R(\theta_1,\dots,\theta_n) = \sum_{|k|^2\leq R^2} a_{k_1\dots k_n} e^{i(k_1\theta_1+\dots+k_n\theta_n)} ,$$

dove abbiamo posto $|k|^2 = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2$.

Si pone il seguente

Problema 3. *Per quali* p>1 *è vero che*

(1.36) $$\|\hat{f}_R - f\|_{L^p(T^n)} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

Se n=1 la risposta al Problema 3 è affermativa per ogni p>1 grazie al Teorema di M. Riesz $[Z]_1$. Tuttavia, per n≥2 la situazione è drasticamente differente. Infatti, equivalente al Problema 3 è il seguente (cfr. $[S]_1$).

Problema 4. *Sia* χ *la funzione caratteristica di* $B(0,1)=\{x\in R^n \mid |x|<1\}$ *e sia* T *l'operatore definito da*

(1.37) $$\widehat{Tf} = \chi\hat{f}.$$

Per quali $p>1$ T *è un operatore limitato su* $L^p(R^n)$?

Da (1.37) si trae $Tf = \mathscr{F}^{-1}(\chi)*f$. Ora se usiamo la formula (1.10) della Proposizione 1.1 si ottiene

$$(1.38) \qquad \check{\chi}(x)=\mathscr{F}^{-1}(\chi)(x)=(2\pi)|x|^{-\frac{n-2}{2}}\int_0^1 J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi|x|s)s^{\frac{n}{2}}\,ds$$

Ora se J_ν è la funzione di Bessel d'ordine ν con $Re\nu>-1$ vale la seguente formula [GR]

$$(1.39) \qquad \int_0^1 J_\nu(as)s^{\nu+1}ds = a^{-1}J_{\nu+1}(a).$$

Se perciò scegliamo $a = 2\pi|x|$ e $\nu = \frac{n}{2}$ otteniamo da (1.39)

$$(1.40) \qquad \check{\chi}(x) = |x|^{-\frac{n}{2}} J_{\frac{n+1}{2}}(2\pi|x|).$$

Ora usiamo la seguente informazione (cfr. [L], p. 134)

$$(1.41) \qquad J_\nu(t) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos\left(t-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right), \quad t\to+\infty$$

Da (1.41) si ricava dopo un po' di conti

$$(1.42) \qquad \begin{cases} \check{\chi}(x) \cong |x|^{-\frac{n+1}{2}}\sin(2\pi|x|), & |x|\to+\infty \\ \check{\chi}(x) = O(|x|^{\frac{1}{2}}), & |x|\to 0^+. \end{cases}$$

La (1.42) dimostra che $K = \check{\chi}$ è ben lungi dall'essere in $L^1(R^n)$. Ora applichiamo T alla funzione caratteristica f_0 della palla $B(0, \frac{1}{100})$. Allora dalla (1.42)

(1.43) $\quad Tf_0(x) = K*f_0(x) \cong |x|^{-\frac{n+1}{2}}$ per $|x|\to+\infty$

Ciò dimostra che

$$Tf_0 \notin L^p(R^n) \quad se \quad p \leq \frac{2n}{n+1}$$

(Ritorna il numero magico della Proposizione 1.2!). E quindi:

(1.44) $\quad$ *T non è limitato su* $L^p(R^n)$ *se* $p \leq \frac{2n}{n+1}$.

Per dualità si dimostra allora che

(1.45) $\quad$ *T non è limitato su* $L^p(R^n)$ *se* $p \geq \frac{2n}{n-1}$.

Si noti che $\frac{2n}{n-1} = (\frac{2n}{n+1})'$.

In virtù di tali considerazioni il Problema 4 si può così riformulare:

Problema 4'. *Esistono dei* p, *con*

(1.46) $\quad \frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$

tali che T *sia limitato su* $L^p(R^n)$?

E' ovvio che siccome $\chi \in L^\infty(R^n)$ T è limitato su $L^2(R^n)$. Un celebre risultato di C. Fefferman dà una risposta sconcertante al Problema 4'.

Teorema 1.2. (cfr. $[F]_2$). *Sia* $n>1$. *Allora* T *è limitato solo su* $L^2(R^n)$.

Il lavoro di Fefferman $[F]_2$ apparso su Annals of Mathematics del

1971 era stato preceduto di quasi due anni dal sopra citato lavoro $[F]_1$, dello stesso autore, apparso su Acta Mathematica del 1970 (ma entrato in redazione in giugno del 1969). In quest'ultimo si congettura che il Problema 4' abbia soluzione per tutti i p indicati nella (1.46). Per attaccare tale problema l'autore introduce una famiglia a un parametro di operatori, T_λ, allo scopo di studiare le proprietà di continuità su $L^p(R^n)$. T_λ è così definito

$$(1.47) \qquad T_\lambda f(x) = \left(\frac{\sin|\cdot|}{|\cdot|^\lambda}\right) * f(x) \quad , \quad \lambda \in R.$$

E' chiaro che l'operatore T_λ è legato all'operatore T introdotto in (1.37). Se infatti $\lambda = \frac{n+1}{2}$, allora il nucleo di $T_{\frac{n+1}{2}}$ ha lo stesso comportamento all'∞ del nucleo di T, si veda la prima delle (1.42). In $[F]_1$ Fefferman congettura che il risultato ottimale relativo all'operatore T_λ sia:

" *Sia* $1<p\leq 2$, $\lambda > \frac{n}{p}$. *Allora esiste una costante* $A = A_{\lambda p}>0$ *tale che*

$$(1.47) \qquad \|T_\lambda f\|_p \leq A_{\lambda p} \|f\|_p \quad , \quad f \in L^p(R^n).$$

Ciò che in realtà si dimostra in $[F]_1$ è il seguente

<u>Teorema 1.3.</u> (cfr. $[F]_1$). *Sia* $1<p<\frac{4n}{3n+1}$. *Se* $p > \frac{n}{\lambda}$, *allora* T_λ *è un operatore limitato su* $L^p(R^n)$, *cioè vale* (1.47).

Si noti che $\frac{4n}{3n+1} < 2$. Anche si osservi che se $\lambda = \frac{n+1}{2}$, e se $p > \frac{n}{\lambda} = \frac{2n}{n+1}$, allora non può essere $1<p<\frac{4n}{3n+1}$, essendo $\frac{4n}{3n+1} < \frac{2n}{n+1}$! Quindi il *Teorema 1.3 non dà alcuna informazione sull'operatore* $T_{\frac{n+1}{2}}$. Questo fatto è strettamente connesso al risultato negativo del Teorema 1.2.

Ma torniamo al problema della restrizione della trasformata di Fourier. Non abbiamo ancora detto in che modo esso sia legato al Problema 4. Eb-

bene in $[F]_1$ Fefferman ha dimostrato una cosa notevole. Precisamente, che:

Per ogni p, $1<p<\frac{2n}{n+1}$, *per cui l'operatore di restrizione* $f\to\hat{f}|_{S^{n-1}}$ *è continuo da* $L^p(R^n)$ *a* $L^2(S^{n-1})$, *l'operatore* T_λ, *con* $\lambda>\frac{n}{p}$, *è continuo su* $L^p(R^n)$.

Si noti l'analogia degli esponenti soglia nei Teoremi 1.1 (questo ultimo era già disponibile a Fefferman in $[F]_1$) e 1.3. Il fatto che la dimostrazione del Teorema 1.3 si basasse sul Teorema 1.1 riaccese la curiosità sul problema della restrizione. Già in $[F]_1$ viene dimostrato un lemma che in dimensione due migliora il risultato contenuto nel Teorema 1.1 (si noti che se $n=2$ $\frac{4n}{3n+1}=\frac{8}{7}$, mentre $\frac{2n}{n+1}=\frac{4}{3}$), ed è quasi ottimale. Fu Zygmund, nel 1974, a dimostrare il risultato ottimale di restrizione in R^2.

Teorema 1.4. (cfr. $[Z]_2$). *Sia* $1\le p<\frac{4}{3}$. *Allora se* $q=\frac{1}{3}p'$ *esiste una costante* $A_p>0$ *tale che*

$$(1.44)\qquad \left(\int_{S'}|\hat{f}(\omega)|^q d\omega\right)^{\frac{1}{q}} \le A_p\left(\int_{R^2}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f\in L^p(R^2).$$

Osserviamo esplicitamente che se $p=\frac{4}{3}$, allora $p'=4$ e quindi lo esponente q in (1.44) è maggiore di $\frac{4}{3}$. Il fatto che per $n=2$ l'esponente critico sia $\frac{4}{3}$ e il suo duale 4, e l'uso della variabile complessa, giocano un ruolo chiave nella dimostrazione del Teorema 1.4 dato in $[Z]_2$.

Nel 1975 P. Tomas ha fornito l'idea conclusiva per risolvere il Problema 1' quando $q=2$ in (1.21). La sua dimostrazione, ingegnosa ma elementare, copre l'intervallo $1\le p<\frac{2(n+1)}{n+3}$ (si ricordi (1.32)). Stein, subito dopo, usando una famiglia analitica di operatori, ha ottenuto anche il caso $p=\frac{2(n+1)}{n+3}$. Ecco il risultato (cfr. $[T]_1$, $[T]_2$)

Teorema 1.5 (di Tomas-Stein). *Sia* $1\le p\le\frac{2(n+1)}{n+3}$. *Allora esiste*

$A = A_{p,n} > 0$ *tale che*

$$(1.45) \qquad \|\hat{f}\|_{L^2(S^{n-1})} \leq A \|f\|_{L^p(R^n)} , \quad f \in L^p(R^n).$$

La (1.45) *non vale se* $p > \frac{2(n+1)}{n+3}$.

<u>Prova</u>. Sia $d\omega$ la misura su S^{n-1} e pensiamola come una misura su R^n concentrata su S^{n-1}. Definiamo un operatore R tramite la formula

$$(1.46) \qquad \widehat{Rf} = \hat{f}\, d\omega \quad , \text{ cioè } \quad Rf = d\omega * f.$$

Allora per (1.46)

$$(1.47) \qquad \int_{S^{n-1}} |f(w)|^2 d\omega = \int_{R^n} \hat{f}(x)\, \bar{\hat{f}}(x)\, d\omega = \int_{R^n} \bar{\hat{f}}(x)\, \widehat{Rf}(x)\, dx$$

$$= \int_{R^n} \bar{f}(x)\, Rf(x) dx \leq \|f\|_p \, \|Rf\|_{p'} .$$

La dimostrazione sarà completata se proviamo che

$$(1.48) \qquad \|Rf\|_{p'} \leq C_{p,n} \|f\|_p \quad , \quad f \in L^p(R^n).$$

Introduciamo il nucleo

$$(1.49) \qquad K_z(x) = c_z\, |x|^{-(\frac{n-2}{2}+z)}\, J_{\frac{n-2}{2}+z}(2\pi|x|) \ , \quad z \in C,$$

dove c_z è una funzione di z che si determina in maniera opportuna. Definiamo una famiglia a un parametro di operatori mediante la formula

$$(1.50) \qquad R_z f = K_z * f \qquad z \in C.$$

Osserviamo che (1.28) dà (se $C_0 = 2\pi$)

$$(1.51) \qquad K_0(x) = \frac{c_0}{2\pi} \widehat{d\omega}(x),$$

e quindi

$$(1.52) \qquad R_0 f = K_0 * f = \frac{c_0}{2\pi} Rf.$$

Ora consideriamo la funzione

$$(1.53) \qquad h_z(x) = \frac{(1-|x|^2)_+^z}{\Gamma(z+1)} \quad , \quad \text{Rez} > -1,$$

dove per $a \in R$, $a_+ = \max(a,0)$. La proposizione 1.2 dà

$$(1.54) \qquad \hat{h}_z(x) = \frac{(2\pi)|x|^{-\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(z+1)} \int_0^1 (1-s^2)^z J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi|x|s)s^{\frac{n}{2}} ds.$$

Ora vale la seguente formula (cfr. [GR], p. 688)

$$(1.55) \qquad \int_0^1 s^{\nu+1}(1-s^2)^z J_\nu(as)ds = 2^z\Gamma(z+1)a^{-(z+1)}J_{\nu+z+1}(a)$$

se $a>0$, $\text{Re}\nu>-1$, $\text{Rez}>-1$.

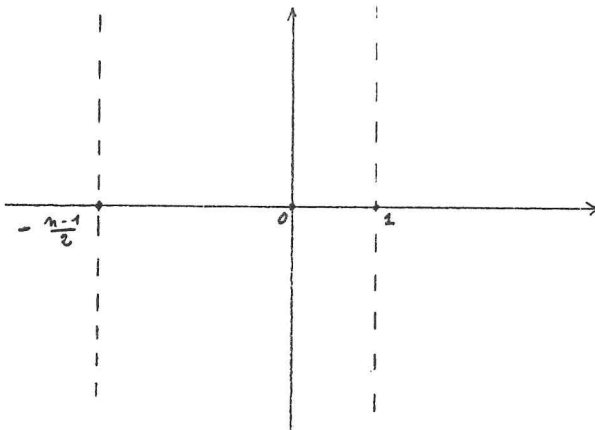
Se in (1.54) prendiamo $\nu = \frac{n}{2} - 1$, $a = 2\pi|x|$, (1.55) dà

$$(1.56) \qquad \hat{h}_z(x) = \pi^{-z} |x|^{-(\frac{n}{2}+z)} J_{\frac{n}{2}+z}(2\pi|x|).$$

Se perciò prendiamo $c_z = \pi^{-(z-1)}$ in (1.49) abbiamo dimostrato che

(1.57) $\qquad K_z = \hat{h}_{z-1}$.

Ora usando la (1.56) si può dimostrare che la (1.50) definisce una famiglia analitica di operatori sulla striscia $\{-\frac{n-1}{2} < \mathrm{Re}z < 1\}$, e che le ipotesi del Teorema d'interpolazione di Stein sono verificate (cfr. Teorema 4.1, p. 205 in [SW]). Supponiamo d'aver provato

$$(1.58) \qquad \begin{cases} R_{-\frac{n-1}{2}+i\gamma} : L^1 \to L^\infty \\ R_{1+i\gamma} : L^2 \to L^2 \end{cases}$$

Ora

$$0 = (1-\theta)(-\frac{n-1}{2}) + \theta \cdot 1 \qquad \text{con}$$

$$\theta = \frac{n-1}{n+1}$$

Per il Teorema di Stein sopracitato

$$R_o = \frac{c_o}{2\pi} R : L^r \to L^{r'}$$

con

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\theta}{2} = \frac{n+3}{2(n+1)} = \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{n-1}{2(n+1)} = \frac{1}{p'}$$

Allora esiste $C = C_{p,n} > 0$ tale che (1.48) valga. La dimostrazione sarà perciò completata se proviamo (1.58). Ora per la (1.56) e la (1.14) si trae

$$K_{-\frac{n-1}{2}+i\gamma} = \hat{h}_{-\frac{n+1}{2}+i\gamma} \in L^\infty(R^n) \quad , \quad \gamma \in R \; .$$

Quindi per il Teorema di Young

$$R_{-\frac{n-1}{2}+i\gamma} f \in L^\infty(R^n) \quad \text{se} \quad f \in L^1(R^n)$$

D'altra parte per (1.2) e (1.53)

$$\|R_{1+i\gamma} f\|_2 = \|\widehat{R_{1+i\gamma} f}\|_2 = \|h_{i\gamma} \hat{f}\|_2 \leq c\|\hat{f}\|_2 = c\|f\|_2 .$$

Vale quindi (1.58).

A questo punto sostiamo un attimo per riassumere i risultati finora discussi. In dimensione due il problema della restrizione della trasformata di Fourier è completamente risolto, v. Proposizione 1.3 e Teorema 1.4. Se $n \geq 3$ il problema è completamente risolto se $1 \leq p \leq \frac{2(n+1)}{n+3}$ e $q=2$. A quanto mi risulta

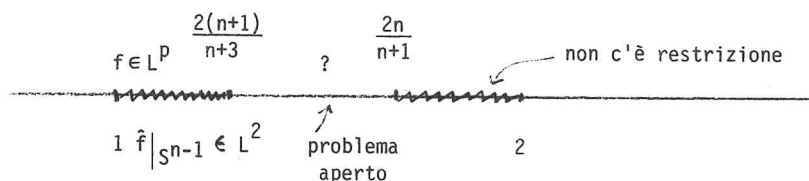
il seguente problema è ancora aperto.

Problema 5. *Sia* $\frac{2(n+1)}{n+3} < p < \frac{2n}{n+1}$. *Provare che se* $q = p' \frac{n-1}{n+1}$, *allora esiste* $A = A_{p,n} > 0$ *tale che*

$$\|\hat{f}\|_{L^q(S^{n-1})} \leq A\|f\|_{L^p(R^n)} \quad , \quad f \in L^p(R^n). \tag{1.59}$$

Il seguente grafico riassume la situazione

$f \in L^p$ $\frac{2(n+1)}{n+3}$? $\frac{2n}{n+1}$ non c'è restrizione

1 $\hat{f}|_{S^{n-1}} \in L^2$ problema aperto   2

Riguardo al Problema 5 sono d'obbligo alcune osservazioni. La dimostrazione del Teorema 1.5 si basa pesantemente sulla (1.47) che fa uso delle proprietà L^2 della trasformata di Fourier. Un altro strumento chiave è la (1.48), che viene di solito chiamata *Lemma di Tomas-Stein*. Quest'ultimo è stato di recente ripreso da C. Sogge e migliorato dal punto di vista delle applicazioni del lemma stesso. Prima di enunciare il risultato di Sogge osserviamo che uno scambio d'integrali permette di riscrivere l'operatore R definito da (1.46) come

$$Rf(x) = \int_{R^n} f(x-y)\left(\int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i\langle y,\omega\rangle} d\omega\right) dy \tag{1.60}$$

$$= \int_{S^{n-1}} e^{2\pi i\langle x,\omega\rangle} \hat{f}(\omega) d\omega$$

Allora vale il seguente (cfr. anche [CS], $[F]_3$ e $[B_0]$)

Teorema 1.6. (cfr. $[So]_1$). *Sia* $1 \le p < \frac{2n}{n+1}$ *e* $q = p' = \frac{n+1}{n-1}$. *Allora esiste una costante* $C = C_{p,n} > 0$ *tale che*

$$(1.61) \qquad \left(\int_{R^n} \left| \int_{S^{n-1}} e^{2\pi i \langle x,\omega \rangle} \hat{f}(\omega) d\omega \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \le C \|f\|_{L^p(R^n)} \,, \quad f \in C_0^\infty(R^n).$$

Notiamo che se $1 \le p \le \frac{2(n+1)}{n+3}$ il Teorema 1.6 implica maggiore sommabilità della (1.48) per l'operatore di Tomas-Stein R in quanto $q = p' \frac{n+1}{n-1} > p'$.

Sul risultato di Sogge, e la sua connessione con problemi relativi a equazioni alle derivate parziali (cfr. $[So]_2$) torneremo più avanti. Come abbiamo già notato la possibilità di avere un risultato di restrizione per la trasformata di Fourier è legata alla presenza di curvatura. I rapporti fra analisi armonica e curvatura costituiscono un campo d'indagine affascinante e ricco di problemi aperti. Mi limiterò nel seguito a dare alcune indicazioni dei risultati esistenti connessi al problema della restrizione, rinviando alla bibliografia per uno studio più dettagliato. Se $d\omega$ rappresenta la misura su S^{n-1} abbiamo visto (v. (1.28)) che

$$\widehat{d\omega}(x) = (2\pi) \, |x|^{-\frac{n}{2}+1} J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi|x|)$$

e quindi (v. (1.4))

$$(1.62) \qquad \widehat{d\omega}(x) = O(|x|^{-\frac{n+1}{2}}) \text{ per } |x| \to +\infty$$

Il comportamento asintotico di $\widehat{d\omega}$ gioca un ruolo chiave nella prova del Teorema 1.5 ed è determinato dalla curvatura di S^{n-1}. In generale, si può considerare un dominio limitato e convesso D con frontiera sufficientemente regolare ∂D. Supponiamo che $d\sigma$ sia la misura superficiale su ∂D e definiamo

(1.63) $$\widehat{dv}(x) = \int_D e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} d\xi \quad ,$$

(1.64) $$\widehat{d\sigma}(x) = \int_{\partial D} e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} d\sigma(\xi) \ .$$

Sia P la funzione supporto di D, cioè

(1.65) $$P(x) = \sup_{\xi\in D} \langle x,\xi\rangle \ .$$

Se $K(\xi)$ denota la curvatura Gaussiana di ∂D in $\xi\in\partial D$, per $x = r\omega$ ($r = |x|$, $\omega = \frac{x}{|x|}$) poniamo

(1.66) $$\rho_D(x) = (2\pi)^{-n} |x|^{-\frac{n-1}{2}} K(\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{-2\pi i(P(x)-\frac{n}{8})}$$

Allora in [H] Herz ha dimostrato il seguente

Teorema 1.7. *Sia D un dominio limitato e convesso con frontiera ∂D di classe C^m, dove $m = [\frac{n-1}{2} + 4]$, e tale che la sua curvatura Gaussiana sia strettamente positiva. Allora quando $|x|\to+\infty$ valgono le stime*

(1.67) $$\widehat{d\sigma}(x) = \rho_D(x) + \bar{\rho}_D(-x) + O(|x|^{-\frac{n+1}{2}})$$

(1.68) $$(2\pi i|x|)\widehat{dv}(x) = \rho_D(x) - \bar{\rho}_D(-x) + O(|x|^{-\frac{n+1}{2}})$$

Si noti che se χ_D è la funzione caratteristica di D, allora $dv = \hat{\chi}_D$ e (1.68) dice che

$$(1.69)\qquad \widehat{\chi_D}(x) = O(|x|^{-\frac{n+1}{2}}) \qquad \text{se } |x|\to+\infty .$$

La (1.69) è quantitativamente simile al caso in cui $D = B(0,1)$, si veda (1.42).

Nelle stesse ipotesi su D Littman ha dimostrato in [L].

Teorema 1.8. *Se in ogni punto di* ∂D k *delle curvature principali sono strettamente positive allora*

$$(1.70)\qquad \widehat{d\sigma}(x) = O(|x|^{-\frac{k}{2}}).$$

Risultati più sofisticati si possono trovare nei lavori $[R]_{1,2}$ e [Sv]. In questi si studia la continuità in L^p di certi operatori massimali legati alla trasformata di Fourier della funzione caratteristica χ_D sotto opportune ipotesi di integrabilità della curvatura Gaussiana di ∂D. Nel 1977 R. Strichartz in [St] ha esteso il Teorema di Tomas-Stein a un'arbitraria superficie quadratica S in R^n. Per descrivere il risultato di di Strichartz sia $P(x)$ un polinomio di secondo grado in R^n a coefficienti reali e sia $r\in R$. Poniamo

$$S = \{x\in R^n \,|\, P(x) = r\}$$

Mediante una trasformazione affine S si può ridurre a uno dei tre casi seguenti

$$(1.71)\qquad S = \{x_n = x_1^2 + \dots + x_a^2 - x_{a+1}^2 - \dots - x_{a+b}^2\} ,$$

con a,b interi non negativi e $a+b = n-1$;

$$(1.72)\qquad S = \{x_1^2 + \dots + x_a^2 - x_{a+1}^2 - \dots - x_{a+b}^2\},$$

dove a,b sono interi positivi e $a+b = n$

(1.73) $$S = \{x_1^2 + \ldots + x_a^2 - x_{a+1}^2 - \ldots - x_{a+b}^2 = 1\},$$

con $a+b = n$, $a \neq 0$.

Allora vale il seguente

Teorema 1.9. (cfr. [St]). *Condizione necessaria e sufficiente perché valga il seguente risultato di restrizione*

(1.74) $$\left(\int_S |\hat{f}(\xi)|^2 d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{2}} \leq A_{p,n} \|f\|_{L^p(R^n)}, \quad f \in L^p(R^n),$$

è che: $p = \dfrac{2(n+1)}{n+3}$ *nel caso in cui* S *è come in* (1.71); $p = \dfrac{2n}{n+2}$ *se* $n \geq 3$ *e* S *è come in* (1.72);

(i) $1 \leq p \leq \dfrac{2(n+1)}{n+3}$ *se* $a=n$, $b=0$ *e* S *è come in* (1.73);

(ii) $n \geq 3$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ *e* S *come in* (1.73), *allora*

$$\frac{2n}{n+2} \leq p \leq \frac{2(n+1)}{n+3} \ ;$$

(iii) $n=2$, $a=b=1$, S *come in* (1.73), *allora*

$$1 < p \leq \frac{6}{5} \ .$$

La dimostrazione del Teorema 1.9 ricalca quella data sopra del Teorema 1.5, e si basa su formule esplicite per la trasformata di Fourier della misura indotta $d\sigma$ su S, cfr. [GS]. In [St] vengono anche presentate alcune applicazioni del Teorema 1.9 al problema di Cauchy per alcune equazioni d'evoluzione lineari, quali l'equazione di Schrödinger con potenziale nullo, e la equazione di Klein-Gordon. Una discussione di queste è rinviata a una nota

successiva.

Nel 1981 A. Greenleaf ha contribuito notevolmente a chiarire il legame profondo fra teoremi di restrizione e curvatura dimostrando il seguente (cfr. anche [M]).

Teorema 1.10. (cfr. [G]). *Sia* $S\subset R^n (n\geq 3)$ *una ipersuperficie* C^∞ *e si supponga che in ogni punto di* S *almeno* k *delle curvature principali siano* $\neq 0$. *Sia* $p = \frac{2(k+2)}{k+4}$, *allora se* $f\in L^p(R^n)$

$$(1.75)\qquad \left(\int_S |\hat{f}(\xi)|^2 d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_{k,n} \|f\|_{L^p(R^n)} ,$$

per una certa costante positiva $C_{k,n}$ *indipendente da* f.

Si osservi che nel caso in cui $S = S^{n-1}$, allora $k = n-1$. Il Teorema 1.10 ridà allora il Teorema di Tomas-Stein. In [G] viene anche evidenziato il ruolo che la curvatura gioca in un altro problema in analisi armonica connesso con quello della restrizione. Ritorniamo alla sfera S^{n-1} in R^n. Definiamo per $f\in C_0^\infty(R^n)$

$$(1.76)\qquad M_t f(x) = \int_{S^{n-1}} f(x-t\omega)d\omega.$$

L'operatore massimale della famiglia $\{M_t\}_{t>0}$ è

$$(1.77)\qquad \mathcal{M}f(x) = \sup_{t>0} M_t f(x) .$$

Si osservi che $M_t f(x)$ è, a meno di una costante dimensionale moltiplicativa, la media di f su una sfera di centro x e raggio t. In $[S]_3$ Stein ha dimostrato il seguente

Teorema 1.11. *Sia* $n \geq 3$. *Allora esiste una costante positiva* $A = A_{n,p}$ *tale che*

$$\|\mathcal{M} f\|_{L^p(R^n)} \leq A \|f\|_{L^p(R^n)} \quad , \quad f \in C_0^\infty(R^n), \tag{1.78}$$

se e solo se $p > \frac{n}{n-1}$.

La dimostrazione di questo Teorema è legato allo studio delle proprietà di continuità in L^p di operatori di convoluzione i cui nuclei sono costituiti dalle funzioni h_z, $z \in C$, $\mathrm{Re}\, z > -1$, introdotte nella (1.53). Il risultato di Greenleaf a cui prima si accennava, è il seguente

Teorema 1.12. (cfr. [G]). *Sia* $S \subset R^n (n \geq 3)$ *una ipersuperficie* C^∞ *e si supponga che in ogni punto di* S *almeno* $k \geq 2$ *delle curvature principali siano* $\neq 0$. *Se* $\delta_t(x) = (t^{a_1} x_1, \ldots, t^{a_n} x_n)$, $a_j \geq 1$, *è una famiglia di omotetie anisotrope trasversali ad* S, *e si definisce*

$$\mathcal{M}_S(f)(x) = \sup_{t>0} \int_S f(x - \delta_t(y)) d\sigma(y), \tag{1.79}$$

allora se $p > \frac{k+1}{k}$ *si ha*

$$\|\mathcal{M}_S(f)\|_{L^p(R^n)} \leq A \|f\|_{L^p(R^n)} \quad , \quad f \in C_0^\infty(R^n), \tag{1.80}$$

essendo $A = A_{p,n,k} > 0$.

La condizione di trasversalità di δ_t a S significa che l'applicazione $(y,t) \to \delta_t(t)$ da $S \times R^+$ a $R^n \setminus \{0\}$ è un diffeomorfismo sull'immagine. Osserviamo che nel caso in cui $S = S^{n-1}$, allora $k = n-1$ e quindi $\frac{k+1}{k} = \frac{n}{n-1}$. Si riottiene così il Teorema 1.11 di Stein.

I Teoremi 1.11 e 1.12 sono strettamente connessi ai Teoremi di restrizione 1.5 e 1.10, nonché al problema della sommabilità alla Bochner-Riesz

(le cui implicazioni sono in questa nota già apparse, anche se ciò non è stato detto esplicitamente).

Una discussione, pur sommaria, dei legami a cui sopra s'è accennato e del problema della sommabilità ottimale alla Bochner-Riesz esula dagli scopi di questa nota. Mi limito a segnalare i recenti lavori [SoS] e [DR], nonché il meno recente [SWa], in connessione con i Teoremi 1.11 e 1.12. Si veda anche $[S]_4$.

Per quanto riguarda il problema della sommabilità alla Bochner-Riesz si veda $[So]_1$ e [Bo].

BIBLIOGRAFIA

[B] W. BECKNER, Inequalities in Fourier Analysis, Annals of Mathematics,

[Bo] L. BÖRJESON, Estimates for the Bochner-Riesz Operator with Negative Index, Indiana Univ. Math. Journal, vol. 35, no. 2 (1986), 225-233.

[CS] L. CARLESON and P. SJÖLIN, Oscillatory Integrals and a Multiplier Problem for the Disc, Studia Math., 44 (1972), 287-299.

[DR] J. DUOANDIKOETXEA and J.L. RUBIO de FRANCIA, Maximal and Singular Integral Operators via Fourier Transform Estimates, Inventiones Mathematicae,

$[F]_1$ C. FEFFERMAN, Inequalities for Strongly Singular Convolution Operators, Acta Math., 124 (1970), 9-36.

$[F]_2$ C. FEFFERMAN, The Multiplier Problem for the Ball, Annals of Math. (1972), 330-336.

$[F]_3$ C. FEFFERMAN, A Note on Spherical Summation Multipliers, Israel Journal of Math., 15 (1973), 44-52.

[GS] I.M. GELFAND and G.E. SHILOV, Generalized Functions, vol. I, Academic Press (1964).

[GR] I.S. GRADSHTEYN and I.M. RYZHIK, Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press (1980).

[G] A. GREENLEAF, Principal Curvature and Harmonic Analysis, Indiana Univ. Math. J., 30 (1981), 519-537.

[H] C.S. HERZ, Fourier Transforms Related to Convex Sets, Annals of Math., 75 (1962), 81-92.

[L] N.N. LEBEDEV, Special Functions and Their Applications, Prentice-Hall (1965).

[Li] W. LITTMAN, Fourier Transforms of Surface Carried Measures, Bull. AMS 69 (1963), 766-770.

[M] B. MARSHALL, The Fourier Transforms of Smooth Measures on Hypersurfaces of R^{n+1}, Canadian J. Math., 38 (1986), 328-359.

$[R]_1$ B. RANDOL, On the Fourier Transform of the Indicator Function of a Planar Set, Trans. AMS, 139(1969), 271-278.

$[R]_2$ B. RANDOL, On the Asymptotic Behavior of the Fourier Transform of the Indicator Function of a Convex Set, Trans. AMS, 139 (1969), 279-285.

$[So]_1$ C.D. SOGGE, Oscillatory Integrals and Spherical Harmonics, Duke Math. J., 53 (1986), 43-65.

$[So]_2$ C.D. SOGGE, Concerning the L^p Norm of Spectral Clusters for Second Order Elliptic Operators on Compact Manifolds, Preprint.

[SoS] C.D. SOGGE and E.M. STEIN, Averages of Functions over Hypersurfaces in R^n, Inventiones Mathematicae, 82 (1985), 543-556.

$[S]_1$ E.M. STEIN, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton Univ. Press (1970).

$[S]_2$ E.M. STEIN, Harmonic Analysis on R^n, in Harm. Anal. (Proc. Conf. DePaul Univ., Chicago, 1974) pagg. 97-135; MAA Stud. Mat. vol. 13, Washington 1976.

$[S]_3$ E.M. STEIN, Maximal Functions: Spherical Means, Proc. Nat. Acad. Sci. 73 (1976), 2174-2175.

$[S]_4$ E.M. STEIN, Some Problems in Harmonic Analysis, Proc. of Symposia in Pure Math., vol. 35, Part. I, (1979).

[SWA] E.M. STEIN and S. WAINGER, Problems in Harmonic Analysis Related to Curvature, Bull. AMS, 54-6 (1978), 1239-1295.

[SW] E.M. STEIN and G. WEISS, Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press (1971).

[St] R.S. STRICHARTZ, Restrictions of Fourier Transforms to Quadratic Surfaces and Decay of Solutions of Wave Equations, Duke Math. J., 44 (1977), 705-714.

[Sv] I. SVENSSON, Estimates for the Fourier Transform of the Characteristic Function of a Convex Set, Arkiv för Mat., 9 (1971), 11-22.

$[T]_1$ P.A. TOMAS, A Restriction Theorem for the Fourier Transform, Bull. AMS, 81 (1975), 477-478.

$[T]_2$ P.A. TOMAS, Restriction Theorems for the Fourier Transform, Proc. of Symposia in Pure Math., 35, part I (1979), 111-114.

[V] N.J. VILENKIN, Special Functions and the THeory of Group Representations, Translations of Math. Monographs vol. 22 (1968).

$[Z]_1$ A. ZYGMUND, Trigonometric Series

$[Z]_2$ A. ZYGMUND, On Fourier Coefficients and Transforms of Functions of two Variables,Studia Math., 50 (1974), 189-201.